

# 7

## Variaciones sobre un mismo tema

### 7.1 Introducción

La simulación da al investigador la libertad de especificar modelos que representen adecuadamente las situaciones de elección objeto de estudio, sin ser obstaculizado por consideraciones puramente matemáticas. Esta perspectiva ha sido el tema principal de nuestro libro. Los modelos de elección discreta que hemos estudiado - es decir, logit, logit jerárquico, probit y logit mixto - están siendo utilizados en la gran mayoría de los casos estudiados. Sin embargo, los lectores no deben sentirse obligados a utilizar estos modelos. En el presente capítulo, se describen varios modelos que se obtienen en condiciones un tanto diferentes de comportamiento. Estos modelos son variaciones de los ya expuestos, dirigidos hacia temas y datos específicos. El objetivo no es simplemente describir modelos adicionales, sino facilitar una explicación que ilustre cómo el investigador puede examinar una situación de elección y desarrollar un modelo y un procedimiento de estimación adecuados para esa situación particular, usando elementos (y adaptándolos) del conjunto estándar de modelos y herramientas.

Cada sección de este capítulo está motivada por un tipo de datos que representan el resultado de un proceso de elección en particular. El escenario en el que podrían surgir estos datos se describe y se identifican las limitaciones que los modelos principales presentan en el tratamiento de estos datos. En cada caso se describe un nuevo modelo que representa mejor la situación de elección. A menudo, este nuevo modelo es sólo un ligero cambio de uno de los modelos principales. Sin embargo, el ligero cambio a menudo hará inservible el software estándar, por lo que el investigador tendrá que desarrollar su propio software, tal vez mediante la modificación de los códigos que están disponibles para los modelos estándar. La capacidad de revisar el código para representar nuevas especificaciones permite al investigador aprovechar la libertad que ofrece este campo.

### 7.2 Datos de preferencia declarada y de preferencia revelada

Decimos que unos datos son de *preferencia revelada* (*revealed-preference data*) si se refieren a las elecciones que las personas realizan en situaciones del mundo real. Estos datos se denominan así porque en ellos la gente revela sus gustos o preferencias a través de las decisiones que toman en su vida. Asimismo, decimos que unos datos son de *preferencia declarada* (*stated-preference data*) cuando

se recogen a través de experimentos o encuestas en los que se presentan a los participantes situaciones de elección hipotéticas. El término se refiere al hecho de que los respondientes declaran cuáles serían sus elecciones en las situaciones hipotéticas. Por ejemplo, en una encuesta, podríamos presentar a una persona tres automóviles con diferentes precios y otros atributos. Preguntaríamos cuál de los tres automóviles compraría si sólo pudiese elegir entre estos tres modelos en el mundo real. La respuesta que facilitase sería la elección declarada por esa persona. Un dato revelado similar de ese respondiente lo obtendríamos preguntando qué automóvil compró la última vez que compró uno.

Cada tipo de dato tiene sus ventajas y sus limitaciones. Los datos de preferencia revelada tienen la ventaja de que reflejan las elecciones reales. Esto, por supuesto, es una gran ventaja. Sin embargo, este tipo de datos se limitan a las situaciones de elección y a los atributos de las alternativas que ya existen actualmente o que han existido en algún momento. A menudo, un investigador querrá examinar las respuestas de las personas a situaciones que no existen en la actualidad, tales como la demanda de un nuevo producto. Los datos de preferencia revelada simplemente no están disponibles para estas nuevas situaciones. Incluso para situaciones de elección que sí existen actualmente, puede haber una variación insuficiente de los factores relevantes como para permitir la estimación con datos de preferencia revelada. Por ejemplo, supongamos que el investigador quiere examinar los factores que afectan la elección del proveedor de energía en los hogares de California. Aunque los clientes residenciales han podido elegir entre diferentes proveedores durante muchos años, apenas ha habido diferencias apreciables de precio entre las ofertas disponibles. La respuesta de los clientes al precio no se puede estimar partiendo de unos datos que contienen poca o ninguna variación de precios. En este sentido, se plantea una paradoja interesante. Si los clientes fuesen muy sensibles al precio, entonces los proveedores, sabiendo esto, ofrecerían precios que igualasen los precios de sus competidores; en estas condiciones se acostumbra a producir una situación de equilibrio muy conocida, en la que todas las empresas ofrecen su servicio (esencialmente) al mismo precio. Si se utilizasen los datos de este mercado en un modelo de elección, el coeficiente de precio resultaría ser insignificante, ya que existe poca variación de precios en los datos. El investigador podría concluir erróneamente de esta poca significación que el precio no es importante para los consumidores. Esta paradoja es inherente a los datos de preferencia revelada. Los factores más importantes para los consumidores a menudo exhiben la menor variación debido a las fuerzas naturales de equilibrio del mercado. Su importancia, por tanto, podría ser difícil de detectar con datos de preferencia revelada.

Los datos de preferencia declarada complementan los datos de preferencia revelada. Para ello, se diseña un cuestionario en el que se presenta al entrevistado uno o más experimentos de elección. En cada experimento, se describen dos o más opciones y se pregunta al encuestado qué opción elegiría si se le presentase esa situación en la vida real. Por ejemplo, en los datos que se examinan en el capítulo 11, se presentan a cada encuestado 12 experimentos. En cada experimento, se describieron cuatro proveedores de energía hipotéticos, incluyendo el precio, los términos del contrato y otros atributos dados para cada proveedor. Se pidió al encuestado que indicase cuál de los cuatro proveedores elegiría.

La ventaja de los datos de preferencia declarada es que los experimentos pueden diseñarse para que contengan tanta variación en cada atributo como el investigador considere apropiado. Aunque pueda existir muy poca variación de precios entre proveedores en el mundo real, los proveedores descritos en los experimentos pueden mostrar suficiente diferencia de precios como para permitir una estimación precisa. Es posible hacer que los atributos varíen entre encuestados y entre experimentos para cada encuestado. Este grado de variación contrasta con los datos de mercado, donde a menudo los mismos productos están disponibles para todos los consumidores de modo que no hay variación en los atributos de los productos entre clientes. Es importante destacar que para productos que no han sido ofrecidos con anterioridad, o para nuevos atributos de productos existentes, los datos de preferencia declarada permiten la estimación

de modelos de elección cuando no existen datos de preferencia revelada. Louviere et al. (2000) describen la forma apropiada de recolectar y analizar datos de preferencia declarada.

Las limitaciones de los datos de preferencia declarada son obvias: lo que las personas declaran que van a hacer a menudo no es lo mismo que lo que realmente hacen. Las personas pueden no saber lo que harían si una situación hipotética fuera real. O pueden no estar dispuestos a decir lo que harían. De hecho, la opinión de los respondientes sobre qué harían frente a una situación hipotética podría estar influenciada por factores que no surgirían en situaciones de elección reales, como por ejemplo su percepción de lo que entrevistador espera o desea que respondan.

Al combinar los datos de preferencias reveladas y declaradas, es posible aprovechar las ventajas de cada método y mitigar al mismo tiempo sus limitaciones. Los datos de preferencia declarada proporcionan la variación necesaria de los atributos, mientras que los datos de preferencia revelada acercan las predicciones de cuota de mercado a la realidad. Para aprovechar las fortalezas de cada tipo de dato se necesita un procedimiento de estimación que (1) permita que los ratios entre coeficientes (que representan la importancia relativa de los diversos atributos) se estimen principalmente a partir de datos de preferencia declarada (o, más generalmente, de cualquier variación en los atributos existente, que por lo general proviene de datos de preferencia declarada), al mismo tiempo que (2) permita que las constantes específicas de alternativa y la escala global de los parámetros se determinen a través de datos de preferencia revelada (ya que las constantes y la escala determinan cuotas de mercado promedio en las condiciones de partida).

Diversos procedimientos para la estimación de modelos de elección discreta que combinan datos de preferencia declarada y observada han sido descritos por Ben-Akiva y Morikawa (1990), Hensher y Bradley (1993) y Hensher et al. (1999) en el contexto de modelos logit, y por Bhat y Castelar (2002) y Brownstone et al. (2000) para modelos logit mixtos. Estos procedimientos constituyen variaciones de los métodos que ya hemos examinado. El problema más frecuente que surge al combinar datos de preferencia revelada y declarada es que los factores no observados acostumbran a diferir entre los dos tipos de datos. Describimos en los siguientes párrafos cómo afrontar fácilmente esta cuestión.

Especificamos la utilidad que una persona  $n$  obtiene de la alternativa  $j$  en una situación  $t$  como  $U_{njt} = \beta' x_{njt} + e_{njt}$ , donde  $x_{njt}$  no incluye constantes específicas de alternativa y  $e_{njt}$  representa el efecto de factores no observados por el investigador. Estos factores tienen una media para cada alternativa (que representa el efecto promedio que todos los factores excluidos tienen sobre la utilidad de esa alternativa) y una distribución en torno a esta media. La media es capturada por una constante específica de alternativa denominada  $c_j$ , y la distribución alrededor de esta media, para un modelo logit estándar, es de tipo valor extremo con varianza  $\lambda^2 \pi^2 / 6$ . Como se describe en los capítulos 2 y 3, la escala de la utilidad se establece por la normalización de la varianza de la parte no observada de la utilidad. La función de utilidad se convierte  $U_{njt} = (\beta/\lambda)' x_{njt} + c_j/\lambda + \varepsilon_{njt}$ , donde el error normalizado  $\varepsilon_{njt} = (e_{njt} - c_j)/\lambda$  es ahora valor extremo iid con varianza  $\pi^2/6$ . La probabilidad de elección viene dada por la fórmula logit basada en  $(\beta/\lambda)' x_{njt} + c_j/\lambda$ . Los parámetros a estimar son los parámetros originales divididos por un factor de escala  $\lambda$ .

Esta especificación es razonable para muchos tipos de datos y situaciones de elección. Sin embargo, no hay ninguna razón que nos haga esperar que las constantes específicas de alternativa y el factor de escala sean iguales tanto para los datos de preferencia declarada como para los datos de preferencia revelada. Estos parámetros reflejan los efectos de factores no observados, que son necesariamente diferentes en situaciones de elección reales y en situaciones hipotéticas planteadas en una encuesta. En elecciones reales, entran en juego múltiples factores que afectan a la persona pero que no son observados por el investigador. En un experimento de preferencias declaradas, generalmente se solicita al respondiente que asuma que todas las alternativas son iguales en relación a cualquier factor que no

sea mencionado explícitamente en el experimento. Si el entrevistado sigue estas instrucciones de forma precisa, no habría, por definición, factores no observados en las elecciones de preferencia declarada. Por supuesto, los encuestados inevitablemente incorporan algunos conceptos externos a los experimentos en el momento de participar, de forma que sí entran factores no observados. Sin embargo, no hay razón para esperar que estos factores sean los mismos, en términos de media o varianza, a los factores que operan en las elecciones de la vida real.

Para tener en cuenta estas diferencias, se especifican constantes y parámetros de escala diferenciados para situaciones de elección de preferencia declarada y revelada. Definamos  $c_j^s$  y  $c_j^r$  como los parámetros que representan la media del efecto de factores no observados de la alternativa  $j$  en experimentos de preferencia declarada y en elecciones de preferencia revelada, respectivamente. Del mismo modo, sean  $\lambda^s$  y  $\lambda^r$  los parámetros que representan las escalas (proporcionales a las desviaciones estándar) de las distribuciones de los factores no observados en torno a estas medias en situaciones de preferencia declarada y revelada, respectivamente. Para ajustar la escala global de utilidad, normalizamos cualquiera de los dos parámetros de escala a 1, lo que hace que el otro parámetro de escala pase a ser el ratio de los dos parámetros de escala original. Vamos a normalizar  $\lambda^r$ , por lo que  $\lambda^s$  refleja la varianza de los factores no observados en situaciones de preferencia declarada respecto a la varianza en situaciones de preferencia revelada. La utilidad se convierte de este modo en

$$U_{njt} = (\beta/\lambda^s)'x_{njt} + c_j^s/\lambda^s + \varepsilon_{njt},$$

para cada  $t$  que sea una situación de preferencia declarada, y

$$U_{njt} = \beta'x_{njt} + c_j^r + \varepsilon_{njt},$$

para cada  $t$  que sea una situación de preferencia revelada.

El modelo se estima usando los datos disponibles, tanto los de elecciones de preferencia revelada como declarada. Ambos grupos de observaciones se "apilan" conjuntamente para ser introducidos en una rutina de estimación logit. Un conjunto separado de constantes específicas de alternativa se estima para los datos de preferencia declarada y preferencia revelada. Es importante destacar que los coeficientes del modelo se dividen por un parámetro  $1/\lambda^s$  sólo para las observaciones de preferencia declarada. Este escalado diferenciado no es factible en la mayoría de los paquetes de software de estimación logit estándar. Sin embargo, el investigador puede modificar fácilmente el código disponible (o su propio código) para permitir este parámetro extra. Hensher y Bradley (1993) muestran cómo estimar este modelo usando software para logit jerárquico.

Observe que con esta configuración, los elementos de  $\beta$  se estiman usando ambos tipos de datos. Las estimaciones necesariamente reflejarán la cantidad de variación que cada tipo de dato contiene para los atributos (es decir, los elementos de  $x$ ). Si hay poca varianza en los datos de preferencia revelada, reflejando las condiciones de los mercados del mundo real, entonces las  $\beta$ s se determinarán fundamentalmente a través de los datos de preferencia declarada, que contienen cualquier variación que se haya definido en los experimentos. En la medida en que los datos de preferencia revelada contengan variación utilizable, esta información será incorporada en las estimaciones.

Las constantes específicas de alternativa se calculan por separado para los dos tipos de datos. Esta distinción permite al investigador evitar muchos de los sesgos que los datos de preferencia declarada podrían arrojar. Por ejemplo, los encuestados a menudo declaran que van a comprar un producto mucho más de lo que en realidad terminan haciendo. La probabilidad promedio de comprar el producto se captura en la constante específica de alternativa del producto. Si este sesgo se está produciendo, entonces la constante estimada para los datos de preferencia declarada será mayor que la de los datos

de preferencia revelada. En el momento de hacer predicciones, el investigador puede utilizar la constante de los datos de preferencia revelada, vinculando así la predicción a una realidad basada en el mercado actual. Del mismo modo, la escala de los datos de preferencia revelada (que se normaliza a 1) se puede utilizar en la predicción en lugar de la escala de los datos de preferencia declarada, incorporando así correctamente la varianza del mundo real en factores no observados.

### 7.3 Datos de ordenación

En experimentos de preferencia declarada, puede requerirse a los encuestados que ordenen por preferencia las alternativas disponibles en lugar de identificar únicamente la alternativa que escogerían. Esta ordenación puede realizarse de diferentes maneras. Puede pedirse a los encuestados que indiquen qué alternativa elegirían y, posteriormente, después de haber hecho esta primera elección, se les puede pedir cuál de las alternativas restantes elegirían, continuando así con el total de las alternativas. Otra forma de obtener la misma información sería pedir a los encuestados que simplemente ordenen las alternativas de mejor a peor. En cualquier caso, los datos que el investigador obtiene constituyen una ordenación de las alternativas que, presumiblemente, refleja la utilidad que el encuestado obtiene de cada una de ellas.

Los datos de ordenación se pueden manejar a través de un modelo logit estándar o logit mixto, utilizando software disponible en la actualidad sin necesidad de modificaciones. Lo único que se requiere es que los datos de entrada del modelo puedan construirse de una manera particular, que se describe en el texto siguiente. Para un modelo probit, el software disponible necesitaría modificarse ligeramente para poder manejar los datos de ordenación. Sin embargo, la modificación es simple. En primer lugar, consideraremos el caso del logit estándar y mixto.

#### 7.3.1 Logit estándar y mixto

Bajo los supuestos del modelo logit estándar, la probabilidad de cualquier ordenación posible de las alternativas de mejor a peor puede expresarse como el producto de fórmulas logit. Consideremos, por ejemplo, un encuestado al que se le presentan cuatro alternativas denominadas A, B, C y D. Supongamos que la persona ordenó las alternativas de la siguiente manera: C, B, D, A, donde C es la primera elección. Si la utilidad de cada alternativa se distribuye valor extremo iid (como se requiere para un modelo logit), entonces la probabilidad de esta ordenación se puede expresar como la probabilidad logit de elegir la alternativa C del conjunto A, B, C, D, *por* la probabilidad logit de elegir la alternativa B entre las alternativas restantes A, B, D, *por* la probabilidad de elegir la alternativa D entre las alternativas restantes A y D.

Dicho de forma más explícita, si  $U_{nj} = \beta'x_{nj} + \varepsilon_{nj}$  para  $j = A, \dots, D$  con  $\varepsilon_{nj}$  tipo valor extremo iid, entonces

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \text{Prob}(\text{orden } C, B, D, A) &= \\ &= \frac{e^{\beta'x_{nC}}}{\sum_{j=A,B,C,D} e^{\beta'x_{nj}}} \frac{e^{\beta'x_{nB}}}{\sum_{j=A,B,D} e^{\beta'x_{nj}}} \frac{e^{\beta'x_{nD}}}{\sum_{j=A,D} e^{\beta'x_{nj}}} \end{aligned}$$

Esta simple expresión para la probabilidad de una ordenación es el resultado de la forma particular que tiene la distribución de valor extremo, mostrada por primera vez por Luce y Suppes (1965). No puede ser aplicada en general; por ejemplo, no aplica a modelos probit.

La ecuación (7.1) implica que la ordenación de las cuatro alternativas se puede representar como tres elecciones independientes del respondiente. Estas tres elecciones se denominan pseudo-observaciones, ya que la ordenación completa de cada encuestado, lo que constituye una observación real, se escribe como si se tratase de varias observaciones. En general, una ordenación de J alternativas ofrece

$J - 1$  pseudo-observaciones en un modelo logit estándar. Para la primera pseudo-observación se considera que todas las alternativas están disponibles y la variable dependiente identifica la alternativa ordenada en primera posición. Para la segunda pseudo-observación, se descarta la alternativa que ocupó el primer lugar de la ordenación. Las alternativas restantes constituyen el nuevo conjunto de elección, y la variable dependiente identifica la segunda mejor alternativa, y así sucesivamente. Al crear el archivo de entrada para la estimación logit, las variables explicativas para cada alternativa se repiten  $J - 1$  veces, lo que hace proliferar muchas pseudo-observaciones. La variable dependiente para estas pseudo-observaciones identifica, respectivamente, la alternativas clasificada en primera posición, en segunda posición y así sucesivamente. Para cada pseudo-observación, las alternativas que han sido ordenadas por delante de la variable dependiente para esa pseudo-observación se omiten. Una vez los datos se han construido de esta manera, podemos hacer la estimación logit como de costumbre.

Un modelo logit sobre alternativas ordenadas se llama a menudo un *logit expandido o explotado* (*exploded logit*), ya que cada observación explota en varias pseudo-observaciones para facilitar la estimación. Aplicaciones destacadas de este modelo incluyen Beggs et al. (1981), Chapman y Staelin (1982), y Hausman y Ruud (1987).

Un modelo logit mixto puede ser estimado con datos ordenados usando la misma explosión. Supongamos ahora que  $\beta$  es aleatoria con densidad  $g(\beta|\theta)$ , donde  $\theta$  son los parámetros de esta distribución. Condicionada a  $\beta$ , la probabilidad de la ordenación de la persona es un producto de logits, como se indica en la ecuación (7.1). La probabilidad no condicionada es la integral de este producto sobre la densidad de  $\beta$ :

$$(7.2) \quad \begin{aligned} & Prob(\text{orden } C, B, D, A) = \\ & = \int \left( \frac{e^{\beta' x_{nC}}}{\sum_{j=A,B,C,D} e^{\beta' x_{nj}}} \frac{e^{\beta' x_{nB}}}{\sum_{j=A,B,D} e^{\beta' x_{nj}}} \frac{e^{\beta' x_{nD}}}{\sum_{j=A,D} e^{\beta' x_{nj}}} \right) \times g(\beta|\theta) d\beta \end{aligned}$$

El modelo logit mixto sobre alternativas ordenadas se calcula con las rutinas convencionales para logit mixto con datos de panel, utilizando la configuración de datos de entrada tal y como se ha descrito anteriormente para logit, donde las  $J - 1$  pseudo-observaciones por cada ordenación se tratan como  $J - 1$  elecciones en un panel. El modelo logit mixto incorpora el hecho de que cada respondiente tiene sus propios coeficientes y, sobre todo, que los coeficientes del respondiente afectan a toda su ordenación, de manera que las pseudo-observaciones están correlacionadas. Un modelo logit estándar sobre datos ordenados no permite esta correlación.

### 7.3.2 Probit

Los datos de ordenación también pueden utilizarse de forma efectiva en un modelo probit. Sea la utilidad de cuatro alternativas tal y como se ha definido para logit, excepto que los términos de error siguen una distribución normal conjunta:  $U_{nj} = \beta' x_{nj} + \varepsilon_{nj}$  para  $j = A, B, C, D$ , donde  $\varepsilon_n = (\varepsilon_{nA}, \dots, \varepsilon_{nD})'$  se distribuye  $N(0, \Omega)$ . Como antes, la probabilidad de la ordenación de la persona es  $Prob(\text{ordenación}(C, B, D, A)) = Prob(U_{nC} > U_{nB} > U_{nD} > U_{nA})$ . Descomponiendo esta probabilidad conjunta en varias probabilidades condicionadas y una marginal no ayuda en el caso del modelo probit de la misma forma que lo hacía en logit, ya que las probabilidades condicionadas no colapsan en probabilidades no condicionadas como sí lo hacen bajo la hipótesis de errores independientes. Debemos usar una estrategia diferente. Recordemos que para modelos probit vimos que era muy conveniente trabajar con diferencias de utilidad en lugar de trabajar con las utilidades directamente. Denotemos  $\tilde{U}_{nj} = U_{nj} - U_{nk}$ ,  $\tilde{x}_{nj} = x_{nj} - x_{nk}$  y  $\tilde{\varepsilon}_{nj} = \varepsilon_{nj} - \varepsilon_{nk}$ . La probabilidad de la ordenación puede

expresarse ahora como  $\text{Prob}(\text{ordenación}(C, B, D, A)) = \text{Prob}(U_{nC} > U_{nB} > U_{nD} > U_{nA}) = \text{Prob}(\tilde{U}_{nBC} < 0, \tilde{U}_{nDB} < 0, \tilde{U}_{nAD} < 0)$ .

Para expresar esta probabilidad, definimos una matriz de transformación  $M$  que calcula las diferencias apropiadas. El lector puede querer revisar en este punto la sección 5.6.3 en relación a la simulación de probabilidades probit para una alternativa elegida, que utiliza una matriz de transformación similar. El mismo procedimiento se utiliza para datos de ordenación, pero con una matriz de transformación diferente.

Apilamos las alternativas de la A a la D, de manera que la utilidad queda expresada en forma vectorial como  $U_n = V_n + \varepsilon_n$ , donde  $\varepsilon_n \sim N(0, \Omega)$ . Definimos la matriz  $3 \times 4$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene una fila por cada desigualdad en el argumento de la probabilidad  $\text{Prob}(\tilde{U}_{nBC} < 0, \tilde{U}_{nDB} < 0, \tilde{U}_{nAD} < 0)$ . Cada fila contiene un 1 y un -1, junto con ceros, donde el 1 y el -1 identifican las alternativas que están siendo diferenciadas para la desigualdad. Con esta matriz, la probabilidad de las alternativas ordenadas se convierte en

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\text{ordenación}(C, B, D, A)) &= \text{Prob}(\tilde{U}_{nBC} < 0, \tilde{U}_{nDB} < 0, \tilde{U}_{nAD} < 0) \\ &= \text{Prob}(MU_n < 0) \\ &= \text{Prob}(MV_n + M\varepsilon_n < 0) \\ &= \text{Prob}(M\varepsilon_n < -MV_n). \end{aligned}$$

Las diferencias de error definidas por  $M\varepsilon_n$  se distribuyen con densidad normal conjunta con media cero y covarianza  $M\Omega M'$ . La probabilidad de que estas diferencias de error correlacionadas caigan por debajo de  $-MV_n$  se simula mediante GHK de acuerdo al método dado en la sección 5.6.3. Este procedimiento ha sido aplicado por Hajivassiliou y Ruud (1994) y Schechter (2001).

## 7.4 Escalas de respuesta ordenadas

En las encuestas, a menudo se pide a los encuestados que proporcionen clasificaciones de las alternativas de diversa índole. Algunos ejemplos:

¿En qué medida crees que el presidente está haciendo un buen trabajo? Marca una opción:

1. Muy buen trabajo
2. Buen trabajo
3. Ni bueno ni malo
4. Mal trabajo
5. Muy mal trabajo

¿En qué medida te gusta este libro? Valora el libro de 1 a 7, donde 1 es lo peor que jamás hayas leído (aparte de *Los puentes de Madison*, por supuesto) y 7 es lo mejor

1 2 3 4 5 6 7

¿Qué probabilidad existe de que compres un ordenador nuevo este año?

1. Nada probable

2. Algo probable

3. Muy probable

La principal característica común de estas preguntas, desde la perspectiva del modelo de datos, es que las posibles respuestas están ordenadas. Una calificación de un libro de 6 es superior a 5, que es superior a 4, y una calificación del presidente de “muy mal trabajo” es peor que “mal trabajo”, que es peor que “ni bueno ni malo”. Podría especificarse un modelo logit estándar con cada respuesta potencial como una alternativa. Sin embargo, la hipótesis del modelo logit de errores independientes para cada alternativa es incompatible con el hecho de que las alternativas tengan un orden: con alternativas ordenadas, una alternativa es más similar a las alternativas próximas en la escala y menos similar a las alternativas más alejadas. La naturaleza ordenada podría ser manejada mediante la especificación de un logit jerárquico, un logit mixto o un modelo probit que represente el patrón de similitud y disimilitud entre las alternativas. Por ejemplo, podría estimarse un modelo probit con correlación entre alternativas, siendo la correlación existente entre 2 y 3 mayor que la existente entre 1 y 3, y la correlación entre 1 y 2 mayor que la existente entre 1 y 3. Sin embargo, tal especificación, aunque pueda proporcionar buenos resultados, no se ajusta realmente a la estructura de los datos. Recordemos que la formulación tradicional para estos modelos se inicia con una especificación de la utilidad asociada con cada alternativa. Para la pregunta de valoración sobre el trabajo del presidente, la formulación asumiría que hay cinco utilidades, una para cada posible respuesta, y que la persona está eligiendo entre las alternativas de 1 a 5 aquella que tiene la mayor utilidad. Si bien es posible pensar en el proceso de decisión de esta manera (y el modelo resultante probablemente proporcionará resultados útiles), no es una forma muy natural de pensar en la decisión del respondiente.

Una representación más natural del proceso de decisión es pensar que el respondiente tiene un cierto nivel de utilidad u opinión asociado con el objeto de la pregunta, y que está respondiendo la pregunta en base a lo grande que es esta utilidad. Por ejemplo, sobre la pregunta relativa al presidente, la siguiente formulación parece representar mejor el proceso de decisión. Supongamos que el encuestado tiene una opinión sobre lo bien que lo está haciendo el presidente. Esta opinión está representada en una variable (no observable) que etiquetamos  $U$ , donde los niveles superiores de  $U$  significan que la persona piensa que el presidente está haciendo un buen trabajo y los niveles más bajos significan que piensa que el presidente está haciendo un mal trabajo. Al responder a la pregunta, a la persona se le pide que exprese esta opinión seleccionando una de cinco categorías posibles: “muy buen trabajo”, “buen trabajo” y así sucesivamente. Es decir, a pesar de que la opinión de la persona  $U$  puede tomar muchos niveles diferentes que representan diferentes niveles de agrado o desagrado con el trabajo que el presidente está haciendo, la pregunta sólo permite cinco posibles respuestas. La persona elige una respuesta con base al nivel de su  $U$ . Si  $U$  está por encima de cierto límite, que denominamos  $k_1$ , el entrevistado elige la respuesta “muy buen trabajo”. Si  $U$  está por debajo de  $k_1$  pero por encima de otro umbral  $k_2$ , entonces responderá “buen trabajo.” Y así sucesivamente. La decisión se representa como

- “Muy buen trabajo” si  $U > k_1$
- “Buen trabajo” si  $k_1 > U > k_2$
- “Ni bueno ni malo” si  $k_2 > U > k_3$
- “Mal trabajo” si  $k_3 > U > k_4$
- “Muy mal trabajo” si  $k_4 > U$ .

El investigador observa algunos de los factores que se relacionan con la opinión del entrevistado, como la afiliación política de la persona, los ingresos, etc. Sin embargo, otros factores que afectan a la opinión de la persona no pueden ser observados. Descomponemos  $U$  en componentes observados y no observados:  $U = \beta'x + \varepsilon$ . Como de costumbre, los factores no observados  $\varepsilon$  se consideran aleatorios. Su distribución determina la probabilidad de las cinco respuestas posibles a la pregunta.



La figura 7.1 ilustra la situación.  $U$  se distribuye alrededor de  $\beta'x$  con una forma de distribución que sigue la distribución de  $\varepsilon$ . Hay unos puntos de corte para las posibles respuestas:  $k_1, \dots, k_4$ . La probabilidad de que la persona responda “muy mal trabajo” es la probabilidad de que  $U$  sea menor a  $k_4$ , que es la zona correspondiente a la cola izquierda de la distribución. La probabilidad de que la persona diga “mal trabajo” es la probabilidad de que  $U$  esté por encima de  $k_4$ , indicando que no piensa que el trabajo sea muy malo, pero está por debajo  $k_3$ . Esta probabilidad es el área entre  $k_4$  y  $k_3$ .

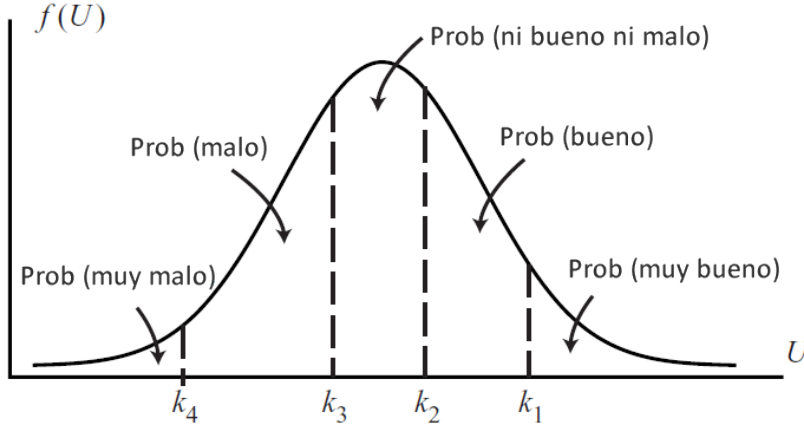


Figura 7.1 Distribución de la opinión acerca del trabajo del presidente

Una vez se especifica una distribución para  $\varepsilon$ , las probabilidades se pueden calcular exactamente. Por simplicidad, supongamos que  $\varepsilon$  se distribuye con densidad logística, lo que significa que la distribución acumulativa de  $\varepsilon$  es  $F(\varepsilon) = \exp(\varepsilon) / (1 + \exp(\varepsilon))$ . La probabilidad de la respuesta “muy mal trabajo” es entonces

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}(\text{"muy mal trabajo"}) &= \text{Prob}(U < k_4) \\
 &= \text{Prob}(\beta'x + \varepsilon < k_4) \\
 &= \text{Prob}(\varepsilon < k_4 - \beta'x) \\
 &= \frac{e^{k_4 - \beta'x}}{1 + e^{k_4 - \beta'x}}.
 \end{aligned}$$

La probabilidad de “mal trabajo” es

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}(\text{"mal trabajo"}) &= \text{Prob}(k_4 < U < k_3) \\
 &= \text{Prob}(k_4 < \beta'x + \varepsilon < k_3) \\
 &= \text{Prob}(k_4 - \beta'x < \varepsilon < k_3 - \beta'x) \\
 &= \text{Prob}(\varepsilon < k_3 - \beta'x) - \text{Prob}(\varepsilon < k_4 - \beta'x) \\
 &= \frac{e^{k_3 - \beta'x}}{1 + e^{k_3 - \beta'x}} - \frac{e^{k_4 - \beta'x}}{1 + e^{k_4 - \beta'x}}.
 \end{aligned}$$

Las probabilidades para el resto de respuestas se obtienen de forma análoga. Las probabilidades entran en la función log-verosimilitud como de costumbre, y la maximización de dicha función de verosimilitud proporciona las estimaciones de los parámetros. Observe que los parámetros estimados son  $\beta$ , que informa del efecto de las variables explicativas sobre la opinión que tiene la gente sobre el presidente, así como los puntos de corte  $k_1, \dots, k_4$ .

Este modelo se denomina logit ordenado (*ordered logit*), ya que utiliza la distribución logística sobre alternativas ordenadas. Desafortunadamente, los modelos logit jerárquicos en ocasiones han sido llamados logits ordenados; esta nomenclatura causa confusión y esperamos que se evite en el futuro.

Observe que las probabilidades del modelo logit ordenado incorporan la fórmula logit binaria. Esta similitud con el logit binario es sólo incidental: la formulación tradicional de un logit binario especifica dos alternativas con una utilidad para cada una, mientras que el modelo logit ordenado tiene una única utilidad con múltiples alternativas que representan el nivel de esa utilidad. La similitud en la fórmula surge del hecho de que si dos variables aleatorias son tipo valor extremo iid, su diferencia sigue una distribución logística. Por lo tanto, asumir que en un logit binario ambas utilidades son de valor extremo iid es equivalente a asumir que la diferencia en las utilidades se distribuye de forma logística, la misma distribución de la utilidad del modelo logit ordenado.

Un modelo similar se obtiene bajo el supuesto de que  $\varepsilon$  se distribuye de forma normal estándar en lugar de logística (Zavoina y McKelvey, 1975). La única diferencia surge por el hecho de la fórmula logit binaria se sustituye por la distribución normal estándar acumulativa. Es decir,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\text{"muy mal trabajo"}) &= \text{Prob}(\varepsilon < k_4 - \beta'x) \\ &= \Phi(k_4 - \beta'x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\text{"mal trabajo"}) &= \text{Prob}(\varepsilon < k_3 - \beta'x) - \text{Prob}(\varepsilon < k_4 - \beta'x) \\ &= \Phi(k_3 - \beta'x) - \Phi(k_4 - \beta'x), \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la función normal acumulativa estándar. Este modelo se denomina probit ordenado (*ordered probit*). Existe software para manejar logits y probits ordenados en muchos paquetes comerciales.

El investigador puede pensar que los parámetros varían al azar en la población. En ese caso, se puede especificar una versión mixta del modelo, como hace Bhat (1999). Sea  $g(\beta|\theta)$  la densidad de  $\beta$ . En este caso, las probabilidades del modelo logit ordenado mixto son simplemente las probabilidades del logit ordenado integradas sobre la densidad  $g(\cdot)$ . Por ejemplo

$$\text{Prob}(\text{"muy mal trabajo"}) = \int \left( \frac{e^{k_4 - \beta'x}}{1 + e^{k_4 - \beta'x}} \right) g(\beta|\theta) d\beta$$

y

$$\text{Prob}(\text{"mal trabajo"}) = \int \left( \frac{e^{k_3 - \beta'x}}{1 + e^{k_3 - \beta'x}} - \frac{e^{k_4 - \beta'x}}{1 + e^{k_4 - \beta'x}} \right) g(\beta|\theta) d\beta,$$

y así sucesivamente. Estas probabilidades se simulan de la misma manera como se hace para logits mixtos, mediante la extracción de valores  $\beta$  al azar de  $g(\cdot)$ , calculando la probabilidad del logit ordenado para cada valor y promediando los resultados. El probit ordenado mixto se obtiene de manera similar.

#### 7.4.1 Escalas de respuesta ordenadas múltiples

Las respuestas de los encuestados a diferentes preguntas suelen estar relacionadas. Por ejemplo, la calificación que una persona da sobre lo bien que el presidente lo está haciendo está probablemente relacionada con la calificación que la persona da sobre lo bien que la economía está yendo. El investigador desearía incorporar en el análisis el hecho de que las respuestas están relacionadas. Para ser concretos, supongamos que se pide a los encuestados que califiquen tanto al presidente como a la economía en una escala de cinco puntos. Sea  $U$  la opinión del encuestado sobre la tarea que el presidente está haciendo, y sea  $W$  la evaluación del entrevistado sobre la economía. Cada una de estas evaluaciones se puede descomponer en factores observados y no observados:  $U = \beta'x + \varepsilon$  y  $W = \alpha'z + \mu$ . En la medida en que las evaluaciones estén relacionadas debido a factores observados, las mismas variables pueden incluirse en  $x$  y  $z$ . Para contemplar la posibilidad de que las evaluaciones estén relacionadas debido a factores no observados, especificamos  $\varepsilon$  y  $\mu$  para que se distribuyan conjuntamente normales con correlación  $\rho$  (y con varianzas unitarias a efectos de normalización). Denotemos los puntos de corte de  $U$  como  $k_1, \dots, k_4$  como antes, y los puntos de corte de  $W$  como  $c_1, \dots, c_4$ . Queremos obtener la probabilidad de cada posible combinación de respuestas a las dos preguntas.

La probabilidad de que una persona diga que el presidente está haciendo un “muy mal trabajo” y al mismo tiempo también diga que la economía está yendo “muy mal” se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & Prob(\text{Presidente "muy mal" y Economía "muy mal"}) \\ &= Prob(U < k_4 \text{ y } W < c_4) \\ &= Prob(\varepsilon < k_4 - \beta'x \text{ y } \mu < c_4 - \alpha'z) \\ &= Prob(\varepsilon < k_4 - \beta'x) \times Prob(\mu < c_4 - \alpha'z | \varepsilon < k_4 - \beta'x) \end{aligned}$$

Del mismo modo, la probabilidad de una calificación “muy mala” para el presidente y “buena” para la economía es

$$\begin{aligned} & Prob(\text{Presidente "muy mal" y Economía "bien"}) \\ &= Prob(U < k_4 \text{ y } c_2 < W < c_1) \\ &= Prob(\varepsilon < k_4 - \beta'x \text{ y } c_2 - \alpha'z < \mu < c_1 - \alpha'z) \\ &= Prob(\varepsilon < k_4 - \beta'x) \times Prob(c_2 - \alpha'z < \mu < c_1 - \alpha'z | \varepsilon < k_4 - \beta'x) \end{aligned}$$

Las probabilidades para las demás combinaciones se obtienen del mismo modo, y la generalización a más de dos preguntas relacionadas es directa. Este modelo se denomina probit ordenado multivariado o multirrespuesta (*multivariate or multiresponse ordered probit*). Las probabilidades pueden simularse mediante GHK de manera similar a como se describe en el capítulo 5. La explicación en el capítulo 5 supone que el truncamiento de la distribución normal conjunta se produce sólo por un lado (ya que para

un probit estándar la probabilidad que se está calculando es la probabilidad de que todas las diferencias de utilidad estén por debajo de cero, que es un truncamiento de la parte superior), mientras que las probabilidades para un probit ordenado multivariado se truncan por ambos lados (como es el caso de la segunda probabilidad indicada anteriormente). Sin embargo, la lógica es la misma. Los lectores interesados pueden referirse a Hajivassiliou y. Ruud (1994) para un tratamiento explícito de GHK con truncamiento por los dos lados.

## 7.5 Valoración contingente

En algunas encuestas, se pide a los entrevistados que expresen sus opiniones en relación a un número específico que el entrevistador indica. Por ejemplo, el entrevistador podría preguntar: "Considera un proyecto destinado a proteger los peces de determinados ríos de Montana. ¿Estarías dispuesto a gastar \$50 en saber que los peces de estos ríos están a salvo?". Esta tipo de pregunta en ocasiones se acompaña de una segunda cuestión que depende de la respuesta del encuestado a la primera pregunta. Por ejemplo, si la persona dijo "sí" a la pregunta anterior, el entrevistador podría seguir preguntando: "¿Y qué tal \$75? ¿Estarías dispuesto a pagar \$75?". Si la persona contestó "no" a la primera pregunta, indicando que no estaba dispuesto a pagar \$50, el entrevistador podría seguir con "¿Estarías dispuesto a pagar \$25?".

Este tipo de preguntas se utilizan a menudo en estudios ambientales, en los que la inexistencia de mercados relativos a la calidad del medio ambiente impide la valoración de los recursos naturales por medio de datos revelados (reales); los artículos editados por Hausman (1993) proporcionan una revisión y una crítica de este procedimiento, que a menudo se denomina "valoración contingente" (*"contingent valuation"*). Cuando únicamente se pregunta una cuestión, como por ejemplo si la persona está dispuesta a pagar \$50, el método se llama de límite simple (*single-bounded*), dado que la respuesta de la persona informa sobre un límite de su predisposición a pagar. Si la persona responde "sí", el investigador sabe que su verdadera predisposición a pagar es por lo menos de \$50, pero no sabe cuánto más puede ser. Si la persona responde "no", el investigador sabe que la predisposición a pagar de la persona es menor a \$50. Ejemplos de estudios que utilizan métodos de límite simple los proporcionan Cameron y James (1987) y Cameron (1988).

Cuando se realiza una segunda pregunta, el método se denomina *límite doble* (*"double-bounded"*). Si la persona dice que está dispuesta a pagar \$50, pero no \$75, el investigador averigua que su verdadera disposición a pagar está entre \$50 y \$75, es decir, está delimitada por ambos lados. Si la persona afirma no estar dispuesta a pagar \$50, pero sí está dispuesta a pagar \$25, su disposición a pagar se sabe que está entre \$25 y \$50. Por supuesto, incluso con un método de límite doble, la disposición a pagar de algunos de los encuestados sólo queda limitada por un lado, como la de una persona que diga que está dispuesta a pagar \$50 y también \$75. Ejemplos de este enfoque los proporcionan Hanemann et al. (1991), Cameron y Quiggin (1994), y Cai et al. (1998).

La cifra que se utiliza como referencia (es decir, los \$50 en nuestro ejemplo) se modifica para diferentes encuestados. Para estimar la distribución de la predisposición a pagar se utilizan las respuestas de una muestra de personas. El procedimiento de estimación está estrechamente relacionado con el que acabamos de describir para logits y probits ordenados, a excepción de que los puntos de corte vienen dados por el diseño del cuestionario y no se estiman como parámetros. Describimos el procedimiento a continuación.

Sea  $W_n$  un parámetro que representa la verdadera predisposición a pagar de la persona  $n$ .  $W_n$  varía entre personas con una distribución  $f(W|\theta)$ , donde  $\theta$  son los parámetros de la distribución, tales como la media y la varianza. El objetivo del investigador es estimar estos parámetros poblacionales. Supongamos que el investigador diseña un cuestionario con un enfoque de límite simple, facilitando un valor de referencia diferente para diferentes encuestados. Denominemos el valor de referencia que se le da a la persona  $n$  como  $k_n$ . La persona responde a la pregunta con un "sí" si  $W_n > k_n$  y con un "no"

en caso contrario. El investigador asume que  $W_n$  se distribuye normalmente en la población con media  $\bar{W}$  y varianza  $\sigma^2$ .

La probabilidad de “sí” es  $\text{Prob}(W_n > k_n) = 1 - \text{Prob}(W_n < k_n) = 1 - \Phi((k_n - \bar{W})/\sigma)$ , y la probabilidad de “no” es  $\Phi((k_n - \bar{W})/\sigma)$ , donde  $\Phi(\cdot)$  es la función normal acumulativa estándar. La función log-verosimilitud resulta en este caso  $\sum_n (y_n \ln(1 - \Phi((k_n - \bar{W})/\sigma)) + (1 - y_n) \ln(\Phi((k_n - \bar{W})/\sigma)))$ , donde  $y_n = 1$  si la persona  $n$  ha dicho “sí” y 0 en caso contrario. Maximizar esta función proporciona estimaciones para  $\bar{W}$  y  $\sigma$ .

Un procedimiento similar se usa si el investigador diseña un cuestionario con límite doble. Denominemos  $k_{nu}$  (u en referencia a “upper”) al valor de referencia de la segunda pregunta en caso de que el encuestado haya respondido “sí” a la primera pregunta, donde  $k_{nu} > k_n$ , y denominemos  $k_{nl}$  (l en referencia a “lower”) al segundo valor de referencia si la persona inicialmente ha respondido “no”, donde  $k_{nl} < k_n$ . Hay cuatro posibles secuencias de respuestas a las dos preguntas. Las probabilidades para estas secuencias se ilustran en la figura 7.2 y vienen dadas por

- Primero “no”, luego “no”:  $P = \text{Prob}(W_n < k_{nl}) = \Phi((k_{nl} - \bar{W})/\sigma)$ .
- Primero “no”, luego “sí”:  $P = \text{Prob}(k_{nl} < W_n < k_n) = \Phi((k_n - \bar{W})/\sigma) - \Phi((k_{nl} - \bar{W})/\sigma)$ .
- Primero “sí”, luego “no”:  $P = \text{Prob}(k_n < W_n < k_{nu}) = \Phi((k_{nu} - \bar{W})/\sigma) - \Phi((k_n - \bar{W})/\sigma)$ .
- Primero “sí”, luego “sí”:  $P = \text{Prob}(W_n > k_{nu}) = 1 - \Phi((k_{nu} - \bar{W})/\sigma)$ .

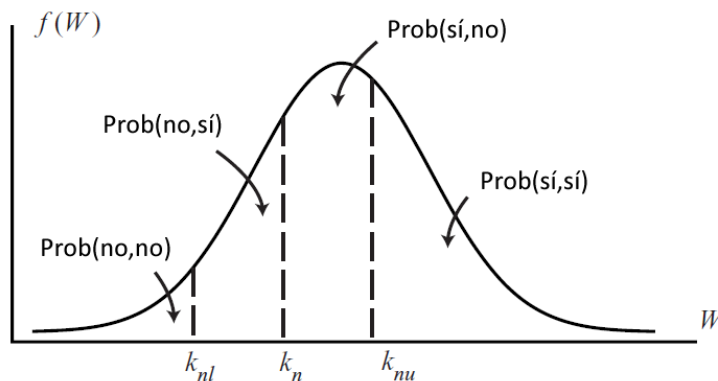


Figura 7.2. Distribución de la predisposición a pagar.

Estas probabilidades entran en la función log-verosimilitud que maximizamos para obtener estimaciones de  $\bar{W}$  y  $\sigma$ . Por supuesto, otras distribuciones se podrían utilizar en lugar de la normal. Log-normal es una opción interesante si el investigador supone que todas las personas tienen una predisposición positiva a pagar. Asimismo, el investigador podría especificar una distribución que tuviese una masa en cero para representar la proporción de personas que no están predispuestas a pagar nada y una log-normal para la parte restante. La generalización a múltiples dimensiones es directa, para reflejar, por ejemplo, que la predisposición de la gente a pagar por un paquete ambiental también podría estar relacionada con su predisposición a pagar por otro. Al igual que con el probit ordenado multivariado, el simulador GHK es muy útil cuando se supone que los múltiples valores se distribuirán de forma normal conjunta.

## 7.6 Modelos mixtos

Hemos visto los modelos logit mixto y logit ordenado mixto. Por supuesto, se pueden desarrollar modelos mixtos de todo tipo utilizando la misma lógica. Cualquier modelo cuyas probabilidades se puedan escribir como una función de unos parámetros también se pueden hacer mixtos al permitir que los parámetros sean aleatorios e integrando la función resultante sobre la distribución de probabilidad

de los parámetros (Greene, 2001). Las probabilidades se simulan mediante la extracción de valores al azar de la distribución, calculando la función para cada valor y promediando el resultado. En la siguiente sección facilitamos dos ejemplos, pero los investigadores inevitablemente necesitarán desarrollar otros que satisfagan las necesidades de sus proyectos particulares, como el uso que hace Bhat (1999) del logit ordenado mixto.

### 7.6.1 Logit jerárquico mixto

El modelo logit mixto no muestra la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes como sí lo hace logit, y puede aproximar cualquier patrón de sustitución mediante una especificación adecuada de las variables y de la distribución de mezcla. Este hecho ha llevado a algunos a pensar que el desarrollo de este modelo suprimía la necesidad de usar modelos logit jerárquicos. Es posible estimar un modelo logit mixto que proporcione patrones de sustitución y de correlación análogos a los de un logit jerárquico. Por ejemplo, considere un logit jerárquico con dos nidos de alternativas etiquetados como A y B. Siempre y cuando los coeficientes log-suma estén entre 0 y 1, la sustitución dentro de cada nido será mayor que la sustitución entre nidos. Este patrón de sustitución puede ser representado en un modelo logit mixto mediante la especificación de una variable indicadora para cada nido y permitiendo que los coeficientes de las variables indicadoras sean aleatorios (restringiendo, a efectos de identificación, que las medias sean cero si se incluye un conjunto completo de constantes específicas de alternativa, y que las dos varianzas sean iguales).

Aunque es posible especificar un modelo logit mixto de esta manera, al hacerlo perdemos la perspectiva del uso de la simulación. Como ya vimos en el Capítulo 1, la simulación se utiliza como una forma de aproximar las integrales cuando no existe una forma cerrada que permita el cálculo analítico. La integración analítica siempre es más precisa que la simulación y se debe utilizar siempre que sea posible, a menos que haya una razón de peso para hacer lo contrario. El uso de un logit mixto para representar patrones de sustitución propios de un logit jerárquico, si bien es posible, reemplaza la forma cerrada de la integral del modelo logit jerárquico por una integral que necesita ser simulada. Desde una perspectiva numérica, esta sustitución sólo puede reducir la precisión. Las únicas posibles ventajas del logit mixto en este contexto son que (1) puede ser más fácil para el investigador probar numerosas estructuras de anidación, incluyendo nidos superpuestos, dentro de un modelo logit mixto que en un logit jerárquico, y (2) el investigador podría haber especificado otros coeficientes como aleatorios, por lo que ya se está utilizando un modelo logit mixto.

La segunda razón sugiere la posibilidad de definir un logit jerárquico mixto. Supongamos que el investigador cree que algunos de los coeficientes del modelo son aleatorios, y también que, condicionados a estos coeficientes, los factores no observados se correlacionan entre alternativas de una forma que puede ser representada por un logit jerárquico. Para representar esta situación podemos especificar un modelo logit jerárquico mixto. Condicionadas a los coeficientes que entran en la utilidad, las probabilidades de elección serían las propias de un logit jerárquico, que tienen una forma cerrada y pueden ser calculadas exactamente. La probabilidad no condicionada pasaría a ser la fórmula logit jerárquica integrada sobre la distribución de los coeficientes aleatorios. Es posible modificar el software existente destinado a estimar un modelo logit mixto, simplemente localizando la fórmula logit dentro del código y reemplazándola por la fórmula logit jerárquica apropiada. La experiencia indica que la maximización de la función de verosimilitud para logits jerárquicos no mixtos es a menudo difícil numéricamente, por lo que hacer el modelo mixto agravará esta dificultad. La estimación bayesiana jerárquica (Capítulo 12) podría resultar particularmente útil en esta situación, ya que no implica la maximización de la función de verosimilitud.

### 7.6.2 Probit mixto

Una limitación de los modelos probit y, de hecho, la característica que los define, es que todos los términos aleatorios entran en la utilidad linealmente y se distribuyen aleatoriamente de tal manera que la utilidad misma se distribuye normalmente. Esta limitación se puede eliminar mediante la especificación de un probit mixto. Supongamos que algunos términos aleatorios entran de forma no lineal o no se distribuyen aleatoriamente, pero que la utilidad condicionada a estos términos sí se distribuye normalmente. Por ejemplo, un coeficiente de precio podría ser log-normal para asegurar que es negativo para todo el mundo, y sin embargo, todos los demás coeficientes podrían ser fijos o normales, y los términos de error finales conjuntamente normales. Un modelo probit mixto es apropiado para una especificación así. Las probabilidades de elección condicionadas al coeficiente de precio seguirían la fórmula probit estándar. Las probabilidades no condicionadas serían la integral de esta fórmula probit sobre la distribución del coeficiente de precio. Para aproximar estas probabilidades necesitaríamos un proceso de simulación de dos niveles: (1) se extrae un valor al azar del coeficiente de precio y (2) para este valor, el simulador GHK o cualquier otro simulador probit se utiliza para aproximar la probabilidad de elección condicionada. Este proceso se repite muchas veces y se promedian los resultados.

Es de esperar que el modelo probit mixto requiera tiempos de ejecución largos, ya que el simulador GHK debe ser calculado para cada valor extraído al azar del coeficiente de precio. Sin embargo, es posible reducir el número de extracciones al azar en el simulador GHK, ya que promediar entre extracciones al azar del coeficiente de precio reduce la varianza generada por el simulador GHK. En principio, el simulador GHK puede basarse en sólo un valor extraído al azar por cada valor extraído al azar del coeficiente de precio. En la práctica, puede que sea aconsejable utilizar más de un valor extraído, pero muchos menos de los que se usarían en un probit no mixto.

El modelo probit mixto proporciona al investigador una forma de evitar algunas de las dificultades prácticas que pueden surgir con un modelo logit mixto. Por ejemplo, para representar heterocedasticidad pura (es decir, una varianza diferente para la utilidad de cada alternativa) o un patrón de correlación fija entre alternativas (es decir, una matriz de covarianza que no depende de las variables), a menudo puede ser más fácil estimar un probit en lugar de especificar numerosos componentes de error dentro de un modelo logit mixto. Como destacó Ben-Akiva et al. (2001), la especificación de la covarianza y la heterocedasticidad puede ser más compleja en un modelo logit mixto que en un probit, porque en el primer caso necesariamente deben añadirse los términos valor extremo iid a cualesquiera otros elementos aleatorios que especifique el investigador. Probit es una especificación más natural en estas situaciones. Sin embargo, si el investigador quiere incluir algunos términos aleatorios no normales, no es posible usar un probit no mixto. El probit mixto permite al investigador incluir términos no normales, manteniendo la simplicidad de la representación que hace probit de la covarianza fija para errores aditivos. Conceptualmente, la especificación y el procedimiento de estimación son sencillos. El único inconveniente es el tiempo de cálculo adicional, algo que se vuelve menos relevante a medida que las computadoras se vuelven más rápidas.

## 7.7 Optimización dinámica

En los capítulos anteriores hemos examinado ciertos tipos de dinámicas, por las que las elecciones en un período afectan a las elecciones en otro período. Por ejemplo, hemos descrito cómo una variable dependiente diferida puede ser incluida para capturar la inercia del comportamiento o la búsqueda de variedad. Estos casos de uso sugieren un ámbito mucho más amplio en relación a estas dinámicas de lo que habíamos realmente considerado. En particular: si elecciones pasadas afectan elecciones presentes, entonces elecciones presentes afectan elecciones futuras, y un decisor que sea consciente de este hecho tomará estos efectos futuros en consideración. Un vínculo desde el pasado hasta el presente necesariamente implica un vínculo desde el presente hasta el futuro.

En muchas situaciones, las elecciones que hace una persona en un momento de su vida tienen una profunda influencia en las opciones que estarán a su disposición en el futuro. Ir a la universidad, aunque caro y a veces irritante, mejora las posibilidades futuras de empleo. Ahorrar dinero ahora permite a una persona comprar cosas más tarde que de otra manera no sería capaz de pagar. Ir al gimnasio hoy significa que podemos saltar mañana. La mayoría de nosotros tenemos en cuenta los efectos futuros cuando elegimos entre alternativas presentes.

La pregunta que se plantea es: ¿cómo puede representarse un comportamiento como éste en modelos de elección discreta? En general, la situación se puede describir de la siguiente manera. Una persona hace una serie de elecciones a lo largo del tiempo. La alternativa elegida en un período afecta a los atributos y a la disponibilidad de alternativas en el futuro. A veces los efectos futuros no se conocen completamente, o dependen de factores que aún no han ocurrido (como la situación futura de la economía). Sin embargo, la persona sabe que en el futuro maximizará la utilidad entre las alternativas que estén disponibles en ese momento, de acuerdo a las condiciones que prevalezcan en ese momento. Este conocimiento le permite elegir la alternativa en el período actual que maximiza su utilidad esperada en los períodos actuales y futuros. El investigador reconoce que el decisor actúa de esta manera, pero no observa todo lo que el decisor está teniendo en consideración en los períodos actuales y futuros. Como de costumbre, la probabilidad de elección es una integral del comportamiento del decisor sobre todos los posibles valores de los factores que el investigador no observa.

En esta sección especificaremos modelos que incorporan las consecuencias futuras de decisiones actuales. Para estos modelos, vamos a suponer que el decisor es totalmente racional en el sentido de que optimiza sus decisiones a la perfección en cada período de tiempo, dada la información que está disponible para él en ese momento y dado que sabe que va a actuar de manera óptima en el futuro, cuando la información futura le sea revelada. Los procedimientos para modelar estas decisiones fueron desarrollados en primer lugar para diversas aplicaciones prácticas, por ejemplo, por Wolpin (1984) sobre la fertilidad femenina, Pakes (1986) sobre las opciones de patentes, Wolpin (1987) sobre la búsqueda de empleo, Rust (1987) sobre la sustitución de motores, Berkovec y Stern (1991) sobre la jubilación, y otros. Eckstein y Wolpin (1989) proporcionan una excelente visión de estas primeras contribuciones. Los esfuerzos de los trabajos más recientes se han dirigido principalmente hacia la solución de algunos de los problemas computacionales que pueden surgir en estos modelos, como veremos a continuación.

Antes de embarcarse en esta tarea, es importante mantener en perspectiva el concepto de racionalidad. Un modelo de toma de decisiones racionales a lo largo del tiempo no necesariamente representa el comportamiento con mayor precisión que un modelo de comportamiento miope, en el que el decisor no tiene en cuenta las consecuencias futuras. De hecho, la realidad en una situación concreta puede estar entre estos dos extremos: los decisores podrían estar actuando de una forma que no sea ni completamente miope ni completamente racional. Como veremos, el comportamiento verdaderamente optimizador es muy complejo. Las personas pueden emprender un comportamiento que sólo es aproximadamente óptimo simplemente porque ellas (nosotros) no pueden encontrar la auténtica forma óptima de proceder. Visto desde otro punto de vista, se podría incluso argumentar que las personas siempre optimizan cuando el ámbito de la optimización se amplía suficientemente. Por ejemplo, algunas reglas de oro u otros comportamientos que parece que sólo aproximan un comportamiento óptimo, podrían resultar realmente óptimos si consideramos los costos de la propia optimización.

Los conceptos y procedimientos que se han desarrollado para examinar el comportamiento optimizador nos llevan, de una forma diferente, a otros tipos de comportamiento que reconocen los efectos futuros de las decisiones actuales. Es más, el investigador a menudo puede poner a prueba representaciones alternativas del comportamiento. El comportamiento miope casi siempre aparece como una restricción comprobable en un modelo totalmente racional, concretamente, un coeficiente cero para la variable que captura los efectos futuros. A veces, el modelo racional estándar es una restricción en un modelo



supuestamente no racional. Por ejemplo, O'Donoghue y Rabin (1999), entre otros, argumentan que las personas son incoherentes a lo largo del tiempo: cuando es lunes, sopesamos los beneficios y costos que vendrán, por ejemplo, el miércoles, sólo ligeramente más que los que llegarán el jueves, y sin embargo, cuando el miércoles llega, sopesamos los beneficios y costos del miércoles (hoy) mucho más que los del jueves. Básicamente, tenemos un sesgo hacia el presente. El modelo racional estándar, donde se utiliza la misma tasa de descuento entre dos períodos independientemente de si la persona se encuentra en uno de esos períodos, constituye una restricción en el modelo incoherente en el tiempo.

Los conceptos en esta área de análisis son más sencillos que la notación empleada. Para desarrollar los conceptos con un mínimo de notación, vamos a empezar con un modelo de dos períodos de tiempo en el que el decisor conoce el efecto exacto que sus elecciones en el primer período tienen en las alternativas y utilidades del segundo período. Ampliaremos posteriormente el modelo a más períodos y a situaciones en las que el decisor se enfrenta a la incertidumbre de los futuros efectos.

### 7.7.1 Dos períodos, sin incertidumbre sobre efectos futuros

Para facilitar una explicación lo más concreta posible, considere la elección que un estudiante de secundaria hace sobre si debe ir o no a la universidad. La elección puede ser examinada en un contexto de dos períodos: los años universitarios y los años post-universidad. En el primer período, el estudiante va a la universidad o no va. A pesar de que este período lo llamamos los años universitarios, el estudiante no tiene por qué haber ido a la universidad, sino que puede haber elegido trabajar en lugar de estudiar. En el segundo período, el estudiante escoge entre los trabajos que están a su disposición en ese momento. Ir a la universidad durante los años universitarios implica menos ingresos durante ese período, pero mejores opciones de trabajo en los años posteriores a la universidad.  $U_{1C}$  (c en referencia a "college") es la utilidad que el estudiante obtiene en el período 1 al ir a la universidad y  $U_{1W}$  (w en referencia a "work") es la utilidad que obtiene en el primer período si trabaja en lugar de ir a la universidad. Si el estudiante fuera miope, elegiría la universidad sólo si  $U_{1C} > U_{1W}$ . Sin embargo, suponemos que no es miope. Para el segundo período,  $J$  denota el conjunto de todos los puestos de trabajo posibles. La utilidad del trabajo  $j$  en el período 2 es  $U_{2j}^C$  si el estudiante fue a la universidad y  $U_{2j}^W$  si trabajó en el primer período. La utilidad de un trabajo depende del salario que la persona recibe así como de otros factores. Para muchos puestos de trabajo, las personas con un título universitario reciben salarios más altos y gozan de mayor autonomía y responsabilidad. Para estos trabajos,  $U_{2j}^C > U_{2j}^W$ . Sin embargo, trabajar durante el primer período proporciona experiencia laboral que da acceso a mayores salarios y responsabilidades que un título universitario para algunos trabajos; para estos trabajos,  $U_{2j}^W > U_{2j}^C$ . Un trabajo que no está disponible se representa teniendo una utilidad infinitamente negativa. Por ejemplo, si el trabajo  $j$  está disponible sólo para los titulados universitarios, entonces  $U_{2j}^W = -\infty$ .

¿Cómo decidirá el estudiante de secundaria si va a la universidad o no? Asumimos por el momento que el estudiante conoce  $U_{2j}^C$  y  $U_{2j}^W$  para todos los trabajos  $j \in J$  en el momento de decidir si va a ir a la universidad en el primer período. Esto es, el estudiante tiene un conocimiento perfecto de sus futuras opciones sea cual sea su elección en el primer período. Posteriormente consideraremos cómo cambia el proceso de decisión cuando el estudiante desconoce las utilidades futuras. El estudiante sabe que cuando el segundo período llegue, escogerá el trabajo que proporcione mayor utilidad. Es decir, él sabe en el primer período que la utilidad que va a obtener en el segundo período, si elige la universidad en el primer período, es el máximo de las utilidades  $U_{2j}^C$  todos los posibles trabajos. Denominamos esta utilidad como  $U_2^C = \max_j (U_{2j}^C)$ . El estudiante, por lo tanto, se da cuenta de que si elige la universidad en el primer período, la utilidad total sobre ambos períodos será

$$TU_C = U_{1C} + \lambda U_2^C$$

$$= U_{1C} + \lambda \max_j (U_{2j}^C),$$

Donde  $\lambda$  refleja el peso relativo que las utilidades en los dos períodos tienen en el proceso de decisión del estudiante. Dada la forma en que hemos definido los períodos de tiempo,  $\lambda$  incorpora la duración relativa de los intervalos de tiempo de cada período, así como la tendencia a subestimar la utilidad futura en relación a la utilidad presente. Es por ello que  $\lambda$  puede ser superior a uno, incluso con el descuento que se aplica a la utilidad futura, si el segundo período representa por ejemplo cuarenta años, mientras que el primer período es de únicamente cuatro años. El comportamiento miope se representa como  $\lambda = 0$  (es decir, no contabilizar la utilidad futura).

Aplicamos la misma lógica a la opción de trabajar en el primer período en vez de ir a la universidad. El estudiante sabe que va a elegir el trabajo que ofrezca mayor utilidad, por lo que  $U_2^W = \max_j (U_{2j}^W)$ , y la utilidad total, durante ambos períodos de tiempo, que proporciona la opción de trabajar en el primer período es

$$\begin{aligned} TU_W &= U_{1W} + \lambda U_2^W \\ &= U_{1W} + \lambda \max_j (U_{2j}^W). \end{aligned}$$

El estudiante elige ir a la universidad si  $TU_C > TU_W$  y en caso contrario, opta por trabajar en el primer período.

Esto completa la descripción del comportamiento del decisor. Ahora vamos a por el investigador. Como siempre, el investigador observa sólo algunos de los factores que afectan a la utilidad que percibe el estudiante. Cada utilidad en cada período de tiempo se descompone en una parte observada y otra parte no observada:

$$U_{1C} = V_{1C} + \varepsilon_{1C},$$

$$U_{1W} = V_{1W} + \varepsilon_{1W}$$

y

$$U_{2j}^C = V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C,$$

$$U_{2j}^W = V_{2j}^W + \varepsilon_{2j}^W,$$

para todos los  $j \in J$ . Agrupamos todos los componentes no observados en un vector  $\varepsilon = \langle \varepsilon_{1C}, \varepsilon_{1W}, \varepsilon_{2j}^C, \varepsilon_{2j}^W, \forall j \rangle$ , y llamamos a la densidad de estos términos  $f(\varepsilon)$ . La probabilidad de que el estudiante escoja la universidad es

$$\begin{aligned} P_C &= \text{Prob}(TU_C > TU_W) \\ &= \text{Prob}(U_{1C} + \lambda \max_j (U_{2j}^C) > U_{1W} + \lambda \max_j (U_{2j}^W)) \\ &= \text{Prob}(V_{1C} + \varepsilon_{1C} + \lambda \max_j (V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C) > V_{1W} + \varepsilon_{1W} + \lambda \max_j (V_{2j}^W + \varepsilon_{2j}^W)) \end{aligned}$$

$$= \int I[V_{1C} + \varepsilon_{1C} + \lambda \max_j (V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C) > V_{1W} + \varepsilon_{1W} + \lambda \max_j (V_{2j}^W + \varepsilon_{2j}^W)] f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Donde  $I[\cdot]$  es una función indicadora de si la declaración entre paréntesis es verdadera.

La integral puede aproximarse a través de simulación. Para un simulador tipo aceptación-rechazo:

1. Extraiga un valor al azar de  $f(\varepsilon)$ , con sus componentes etiquetados como  $\varepsilon_{1C}^r, \varepsilon_{2j}^{Cr}, \dots$
2. Calcule  $U_{2j}^C = V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^{Cr}$  para todo  $j$ , determine la utilidad más alta y etiquétela como  $U_2^{Cr}$ . De forma análoga calcule  $U_2^{Wr}$ .
3. Calcule las utilidades totales como  $TU_C^r = V_{1C}^r + \varepsilon_{1C}^r + \lambda U_2^{Cr}$  y lo mismo para  $TU_W^r$ .
4. Determine si  $TU_C^r > TU_W^r$ . Si es así, establezca que  $I^r = 1$ . De lo contrario,  $I^r = 0$ .
5. Repita los pasos 1-4  $R$  veces. La probabilidad de elección simulada de escoger la universidad es  $\tilde{P}_C = \sum_r I^r / R$ .

Podemos utilizar la participación conveniente del error (como se explica en la sección 1.2) para obtener un simulador suave y más preciso que el simulador de aceptación-rechazo, siempre y cuando la integral sobre los errores del primer período tenga una forma cerrada al condicionar respecto a los errores del segundo período. Supongamos por ejemplo que  $\varepsilon_{1C}$  y  $\varepsilon_{1W}$  son de tipo valor extremo iid. Denominemos a los errores del segundo período colectivamente como  $\varepsilon_2$  con cualquier densidad  $g(\varepsilon_2)$ . Condicionada a los errores del segundo período, la probabilidad de que el estudiante vaya a la universidad está dada por un modelo logit estándar con una variable explicativa adicional que captura el efecto futuro de la elección actual. Es decir

$$P_C = \frac{e^{V_{1C} + \lambda U_2^C(\varepsilon_2)}}{e^{V_{1C} + \lambda U_2^C(\varepsilon_2)} + e^{V_{1W} + \lambda U_2^W(\varepsilon_2)}},$$

donde  $U_2^C(\varepsilon_2)$  se calcula a partir de los errores del segundo período como  $U_2^C(\varepsilon_2) = \max_j (V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C)$ , y de forma similar para  $U_2^W(\varepsilon_2)$ . La probabilidad no condicionada es la integral de esta fórmula logit sobre todos los valores posibles de los errores del segundo período:

$$P_C = \int P_C(\varepsilon_2) g(\varepsilon_2) d\varepsilon_2.$$

La probabilidad se simula de la siguiente manera: (1) Extraiga un valor al azar de la densidad  $g(\cdot)$  y etiquételo como  $\varepsilon_2^r$ . (2) Usando este valor de los errores del segundo período, calcule la utilidad que se obtendría de cada posible puesto de trabajo si la persona fue a la universidad. Es decir, calcule  $U_{2j}^{Cr} = V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^{Cr}$  para todo  $j$ . (3) Determine el máximo de estas utilidades y etiquételo como  $U_2^{Cr}$ . Esta es la utilidad que la persona obtendría en el segundo período si fue a la universidad en el primer período, en base a este valor extraído al azar de los errores del segundo período. (4)-(5) Análogamente, calcule  $U_{2j}^{Wr} \forall j$ , y determine luego el máximo  $U_2^{Wr}$ . (6) Calcule la probabilidad de elección condicionada para este valor extraído al azar como

$$P_C^r = \frac{e^{V_{1C} + \lambda U_2^{Cr}}}{e^{V_{1C} + \lambda U_2^{Cr}} + e^{V_{1W} + \lambda U_2^{Wr}}}.$$

(7) Repita los pasos 1-6 múltiples veces, etiquetando  $r = 1, \dots, R$ . (8) La probabilidad simulada es  $\tilde{P}_C = \sum_r P_C^r / R$ .

Si los errores del segundo período son también valor extremo iid, entonces la probabilidad de aceptar un trabajo particular en el segundo período es logit estándar. La probabilidad de ir a la universidad y elegir el trabajo  $j$  es

$$P_{Cj} = \left( \int \left[ \frac{e^{V_{1C} + \lambda U_2^C(\varepsilon_2)}}{e^{V_{1C} + \lambda U_2^C(\varepsilon_2)} + e^{V_{1W} + \lambda U_2^W(\varepsilon_2)}} \right] g(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \right) \left( \frac{e^{V_{2j}^C}}{\sum_k e^{V_{2k}^C}} \right).$$

Las probabilidades de elección para el primer período se simulan mediante la extracción de valores al azar de los errores del segundo período, como se acaba de describir, siendo  $g(\cdot)$  la distribución de valor extremo. Sin embargo, las probabilidades para el segundo período se calculan de forma exacta. Las extracciones de valores al azar de los errores del segundo período sólo se utilizan en el cálculo de las probabilidades del primer período, donde no se integran en forma cerrada. Los errores del segundo período se integran (y se cancelan) en las probabilidades de forma cerrada del segundo período, lo que permite calcular las probabilidades del segundo período de forma exacta. La aplicación a otras distribuciones que permitan correlación entre alternativas, como GEV o normal, es sencilla. Permitir que los errores se correlacionen a lo largo del tiempo se puede lograr con una distribución normal conjunta y la simulación de las probabilidades de ambos períodos.

### 7.7.2 Múltiples períodos

En primer lugar expandiremos el modelo anterior a tres períodos y posteriormente generalizaremos a cualquier número de períodos. El modelo de elección de la universidad se puede extender al considerar las opciones de jubilación. Cuando una persona llega a la edad de jubilación, por lo general hay varias opciones disponibles. La persona puede seguir trabajando a tiempo completo, puede trabajar a tiempo parcial y gastar parte de sus fondos de retiro, o retirarse totalmente y cobrar de la seguridad social y tal vez una pensión. Los ingresos de la persona para estas alternativas dependen en gran medida del trabajo que la persona haya realizado y del plan de jubilación que su empleo le haya proporcionado. Tres períodos son suficientes para capturar el proceso de decisión. La persona va a la universidad o no en el primer período, elige un empleo en el segundo período y elige entre las diferentes opciones de jubilación disponibles en el tercer período. El estudiante de secundaria sabe, en el momento de decidir si va a la universidad, que esta decisión afectará a sus oportunidades de trabajo, que a su vez afectarán a sus opciones de jubilación. (Esta capacidad de predicción está empezando a parecer una carga pesada para un estudiante de secundaria).

El conjunto de alternativas disponibles en la edad de jubilación se etiqueta como  $S$  y sus elementos se indexan mediante  $s$ . En el tercer período, la utilidad que la persona obtiene de la alternativa  $s$  si fue a la universidad en el primer período y tenía un trabajo  $j$  en el segundo período es  $U_{3s}^{Cj}$ . Condicionado a estas elecciones previas, la persona elige la opción  $s$  si  $U_{3s}^{Cj} > U_{3t}^{Cj}$  para todo  $s \neq t$  y  $s, t \in S$ . Una notación y un comportamiento similar se aplican condicionando a otras elecciones en el primer y segundo períodos.

En el segundo período, la persona reconoce que su elección de trabajo afectará a sus opciones en edad de jubilación. Él sabe que va a maximizar entre las opciones disponibles cuando llegue la edad de jubilación. Supongamos que eligió la universidad en el primer período. En el segundo período, él sabe que la utilidad que obtendrá en el tercer período si opta por un trabajo  $j$  es  $\max_s U_{3s}^{Cj}$ . La utilidad total de elegir el trabajo  $j$  en el segundo período, dado que él eligió la universidad en el primer período, es por lo tanto  $TU_j^C = U_{2j}^C + \theta \max_s U_{3s}^{Cj}$ , donde  $\theta$  pondera el peso del tercer período en relación al segundo período. La persona escoge el trabajo  $j$  si  $TU_j^C > TU_k^C$  para todo  $k \neq j$  y  $j, k \in J$ . Una notación y un comportamiento similar se producen si decide trabajar en el primer período.

Consideremos ahora el primer período. Él sabe que si escoge ir a la universidad, posteriormente escogerá el trabajo que maximice su utilidad condicionada a haber ido a la universidad, y luego elegirá la opción en la edad de jubilación que maximice su utilidad condicionada al trabajo elegido. El total de utilidad que proporciona la elección de ir a la universidad es

$$\begin{aligned} TU_C &= U_{1C} + \lambda \max_j TU_j^C \\ &= U_{1C} + \lambda \max_j (U_{2j}^C + \theta \max_s U_{3s}^{Cj}). \end{aligned}$$

Esta expresión es similar a la del modelo de dos períodos excepto que incluye un nivel adicional de maximización: la maximización para el tercer período está contenida en cada maximización del segundo período. Una expresión similar da la utilidad total de trabajar en el primer período,  $TU_W$ . La persona elige la universidad si  $TU_C > TU_W$ .

Esto completa la descripción del comportamiento de la persona. El investigador observa una parte de cada función de utilidad:  $U_{1C}$ ,  $U_{1W}$ ,  $U_{2j}^C$  y  $U_{2j}^W \forall j$ , y  $U_{3s}^{Cj}$  y  $U_{3s}^{Wj} \forall s \in S, j \in J$ . Las partes no observadas están etiquetadas colectivamente por el vector  $\varepsilon$  con densidad  $f(\varepsilon)$ . La probabilidad de que la persona elija la universidad es

$$P_c = \int I(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

donde

$$I(\varepsilon) = 1$$

si

$$\begin{aligned} &V_{1C} + \varepsilon_{1C} + \lambda \max_j (V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C + \theta \max_s (V_{3s}^{Cj} + \varepsilon_{3s}^{Cj})) \\ &> V_{1W} + \varepsilon_{1W} + \lambda \max_j (V_{2j}^W + \varepsilon_{2j}^W + \theta \max_s (V_{3s}^{Wj} + \varepsilon_{3s}^{Wj})). \end{aligned}$$

Esta expresión es la misma que en el modelo de dos períodos, excepto que ahora el término dentro de la función indicadora tiene un nivel extra de maximización. Podemos obtener un simulador aceptación-rechazo de la siguiente manera: (1) Extraiga un valor al azar de  $f(\varepsilon)$ , (2) calcule la utilidad del tercer período  $U_{3s}^{Cj}$  para cada  $s$ , (3) identifique el máximo sobre  $s$ , (4) calcule  $TU_{2j}^C$  con este máximo, (5) repita los pasos (2)-(5) para cada  $j$ , e identifique el máximo de  $TU_{2j}^C$  sobre  $j$ ; (6) calcule  $TU_C$  usando este máximo, (7) repita los pasos (2)-(6) para  $TU_W$ ; (8) determine si  $TU_C > TU_W$  y establezca  $I = 1$  si es así; (9) Repita los pasos (1)-(8) numerosas veces y promedie los resultados. También es posible usar partición conveniente del error. Por ejemplo, si todos los errores son valor extremo iid, entonces las probabilidades de elección del primer período, condicionadas a valores extraídos al azar de los errores del segundo y tercer períodos, son logit; las probabilidades del segundo período, condicionadas a los errores del tercer período, son logit; y las probabilidades del tercer período son logit.

Ahora podemos generalizar estos conceptos e introducir algo de terminología ampliamente utilizada. Tenga en cuenta que el análisis del comportamiento de la persona y de la simulación de las probabilidades de elección por parte del investigador empieza por el último período y se extiende hacia atrás en el tiempo hasta el primer período. Este proceso se llama recursión hacia atrás (*backwards recursion*). Supongamos que hay  $J$  alternativas en cada uno de los  $T$  períodos de tiempo de igual

longitud. Denotemos una secuencia de elecciones hasta el período  $t$  como  $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ . La utilidad que la persona obtiene en el período  $t$  de la alternativa  $j$  es  $U_{tj}(i_1, i_2, \dots, i_{t-1})$ , que depende de todas las elecciones anteriores. Si la persona elige la alternativa  $j$  en el período  $t$ , obtendrá esta utilidad más la utilidad futura de sus elecciones, condicionada a esta elección. La utilidad total (actual y futura) que la persona obtiene de elegir la alternativa  $j$  en el período  $t$  es  $TU_{tj}(i_1, i_2, \dots, i_{t-1})$ . La persona elige la alternativa en el período actual que proporciona la mayor utilidad total. Por lo tanto, la utilidad total que recibe de su elección óptima en el período  $t$  es  $TU_t(i_1, i_2, \dots, i_{t-1}) = \max_j TU_{tj}(i_1, i_2, \dots, i_{t-1})$ . Esta utilidad total de la opción óptima en el período  $t$ ,  $TU_t$ , se denomina la función de valoración (*valuation function*) en el periodo  $t$ .

La persona elige de manera óptima en el período actual con el conocimiento de que elegirá óptimamente en el futuro. Este hecho establece una relación conveniente entre la función de valoración en períodos sucesivos. En particular,

$$TU_t(i_1, \dots, i_{t-1}) = \max_j [U_{tj}(i_1, \dots, i_{t-1}) + \delta TU_{t+1}(i_1, \dots, i_t = j)],$$

donde  $\delta$  es un parámetro que descuenta el valor de la utilidad futura. En el lado derecho,  $TU_{t+1}$  es la utilidad total que la persona va a obtener del período  $t + 1$  en adelante si opta por la alternativa  $j$  en el período  $t$  (es decir, si  $i_t = j$ ). La ecuación establece que la utilidad total que la persona obtiene de optimizar su comportamiento del período  $t$  en adelante, dadas sus elecciones anteriores, es el máximo sobre  $j$  de la utilidad de  $j$  en el período  $t$ , más la utilidad total descontada de optimizar el comportamiento del período  $t + 1$  en adelante, condicionada a la elección de  $j$  en el período  $t$ . Esta relación es la ecuación de Bellman (1957) aplicada a la elección discreta con información perfecta.

$TU_{tj}(i_1, \dots, i_{t-1})$  a veces es llamada la función de valoración condicionada, condicionada a la elección de la alternativa  $j$  en el período  $t$ . Una ecuación de Bellman también opera para este término:

$$TU_{tj}(i_1, \dots, i_{t-1}) = U_{tj}(i_1, \dots, i_{t-1}) + \delta \max_k [TU_{t+1,k}(i_1, \dots, i_t = j)].$$

Dado que, por definición,  $TU_t(i_1, \dots, i_{t-1}) = \max_j [TU_{tj}(i_1, \dots, i_{t-1})]$ , la ecuación de Bellman en términos de la función de valoración condicionada es equivalente a la ecuación en términos de la función de valoración no condicionada.

Si  $T$  es finito, la ecuación de Bellman se puede aplicar con recursividad hacia atrás para calcular  $TU_{tj}$  para cada período de tiempo. En  $t = T$  no hay período de tiempo futuro, así que  $TU_{Tj}(i_1, \dots, i_{T-1}) = U_{Tj}(i_1, \dots, i_{T-1})$ . Entonces  $TU_{T-1,j}(i_1, \dots, i_{T-2})$  se calcula a partir de  $TU_{Tj}(i_1, \dots, i_{T-1})$  usando la ecuación de Bellman, y así sucesivamente hasta  $t = 1$ . Tenga en cuenta que  $U_{tj}(i_1, \dots, i_{t-1})$  debe ser calculada para cada  $t$ , cada  $j$ , y, muy importante, para cada posible secuencia de elecciones pasadas,  $i_1, \dots, i_{t-1}$ . Con  $J$  alternativas en períodos  $T$  de tiempo, la recursión requiere el cálculo de  $(J^T)T$  utilidades (es decir,  $J^T$  posibles secuencias de elecciones, con cada secuencia conteniendo  $T$  utilidades de un único período). Para simular las probabilidades, el investigador debe calcular estas utilidades para cada valor extraído al azar de factores no observados. Y estas probabilidades deben ser simuladas para cada valor de los parámetros en la búsqueda numérica para las estimaciones. Esta enorme carga computacional ha recibido el nombre de la maldición de la dimensionalidad (*curse of dimensionality*) y es el principal obstáculo para la aplicación de estos procedimientos para más de unos pocos períodos de tiempo y/o alternativas. Veremos en las próximas secciones procedimientos que se han sugerido para evitar o mitigar esta maldición, después de mostrar que la maldición es aún mayor cuando se considera la incertidumbre.

### 7.7.3 Incertidumbre sobre efectos futuros

Hasta ahora hemos asumido en el análisis que el decisor conoce la utilidad de cada alternativa en cada período de tiempo futuro y cómo esta utilidad se ve afectada por decisiones anteriores. Por lo general, el decisor no posee tal conocimiento previo. Un grado de incertidumbre envuelve los efectos futuros de las elecciones actuales. Es posible adaptar el modelo de comportamiento para incorporar la incertidumbre. Para simplificar, volvemos al modelo de dos períodos relativo a nuestro estudiante de secundaria. Supongamos que en el primer período el estudiante no sabe a ciencia cierta las utilidades del segundo período,  $U_{2j}^C$  y  $U_{2j}^W \forall j$ . Por ejemplo, el estudiante no sabe antes de ir a la universidad cómo irá la economía, y por lo tanto cuáles serán sus posibilidades de empleo cuando se gradúe. Estas utilidades pueden ser expresadas como funciones de factores desconocidos  $U_{2j}^C(e)$ , donde  $e$  se refiere colectivamente a todos los factores del segundo período que son desconocidos en el período uno. Estos factores desconocidos se convertirán en conocidos (es decir, se revelarán) cuando el estudiante alcance el segundo período, pero son desconocidos para la persona en el primer período. El estudiante tiene una distribución subjetiva sobre  $e$  que refleja la probabilidad que él atribuye a los factores desconocidos de que tomen unos valores particulares en el segundo período. Esta densidad la denominaremos  $g(e)$ . Él sabe que, independientemente de qué posibilidades de  $e$  se concreten en la realidad, en el segundo período seleccionará el trabajo que le dé la máxima utilidad. Es decir, él sabe que va a recibir la utilidad  $\max_j U_{2j}^C(e)$  en el segundo período, si elige la universidad en el primer período y los factores desconocidos terminan siendo  $e$ . En el primer período, cuando evalúa la posibilidad de ir a la universidad, él toma la expectativa de esta futura utilidad sobre todas las posibles realizaciones de los factores desconocidos, utilizando su distribución subjetiva sobre estas realizaciones. Por tanto, la utilidad esperada que va a obtener en el segundo período si elige la universidad en el primer período es  $\int [\max_j U_{2j}^C(e)] g(e) de$ . La utilidad total esperada de elegir la universidad en el primer período es por lo tanto

$$TEU_c = U_{1c} + \lambda \int [\max_j U_{2j}^C(e)] g(e) de.$$

$TEU_w$  se define de manera similar. La persona elige la universidad si  $TEU_c > TEU_w$ . En el segundo período, los factores hasta ese momento desconocidos se dan a conocer, y la persona elige el trabajo  $j$  si ha elegido la universidad sólo si  $U_{2j}^C(e^*) > U_{2k}^C(e^*)$  para todo  $k \neq j$ , donde  $e^*$  es la realización de los factores que en realidad ocurrieron.

En cuanto al investigador, se le presenta una complicación adicional introducida por  $g(e)$ , la distribución subjetiva del decisor sobre los factores desconocidos. Además de no conocer las utilidades en su totalidad, el investigador tiene sólo un conocimiento parcial de la probabilidad subjetiva  $g(e)$  del decisor. Esta falta de información se suele representar mediante parametrización. El investigador especifica una densidad,  $h(e|\theta)$ , que depende de parámetros desconocidos  $\theta$ . El investigador asume entonces que la densidad subjetiva de la persona es la densidad especificada, evaluada en los parámetros verdaderos  $\theta^*$ . Es decir, el investigador asume que  $h(e|\theta^*) = g(e)$ . Dicho de forma más convincente y precisa: los verdaderos parámetros son, por definición, los parámetros para los que la densidad especificada por el investigador  $h(e|\theta)$  se convierte en la densidad  $g(e)$  que la persona realmente usó. Con una función  $h$  suficientemente flexible, cualquier  $g$  puede representarse como  $h$  evaluada en algunos parámetros, que se llaman los parámetros verdaderos. Estos parámetros se estiman junto con los parámetros que forman parte de la utilidad. (Otras formas de representar la falta de conocimiento que tiene el investigador acerca de  $g(e)$  son posibles; sin embargo, son generalmente más complejas).

Las utilidades se descomponen en sus partes observadas y no observadas, con las partes no observadas llamadas colectivamente  $\varepsilon$  con densidad  $f(\varepsilon)$ . La probabilidad de que la persona vaya a la universidad es

$$P_c = Prob(TEU_c > TEU_w)$$

$$= \int I(TEU_c > TEU_w) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

donde  $TEU_c$  y  $TEU_w$ , según las definiciones anteriores, incluyen una integral cada una sobre  $e$  con densidad  $h(e|\theta)$ . La probabilidad se puede aproximar mediante la simulación de las integrales en  $TEU_c$  y  $TEU_w$ , dentro de la simulación de la integral sobre  $I(TEU_c > TEU_w)$ . Para ello se deben seguir los siguientes pasos. (1) Extraiga un valor al azar de  $\varepsilon$ . (2a) Extraiga un valor al azar de  $h(e|\theta)$ . (2b) Usando este valor, calcule los integrandos en  $TEU_c$  y  $TEU_w$ . (2c) Repita los pasos 2a-b numerosas veces y promedie los resultados. (3) Usando el valor de 2c, calcule  $I(TEU_c > TEU_w)$ . (4) Repita los pasos 1-3 múltiples veces y promedie los resultados. Como el lector puede ver, la maldición de la dimensionalidad empeora.

Varios autores han sugerido formas de reducir la carga computacional. Keane y Wolpin (1994) calculan la función de valoración en una selección de realizaciones de los factores desconocidos y de las decisiones pasadas; luego aproximan la función de valoración en otras realizaciones y decisiones pasadas mediante interpolación a partir de las valoraciones calculadas. Rust (1997) sugiere simular futuros caminos y usar el promedio de estos caminos simulados como una aproximación de la función de valoración. Hotz y Miller (1993) y Hotz et al. (1993) demuestran que existe una correspondencia entre la función de valoración en cada período de tiempo y las probabilidades de elección en períodos futuros. Esta correspondencia permite que las funciones de valoración sean calculadas con estas probabilidades en lugar de usar recursividad hacia atrás.

Cada uno de estos procedimientos tiene limitaciones y es aplicable sólo en determinadas situaciones, que los propios autores describen. Como Rust (1994) ha observado, es poco probable que surja un gran avance de aplicación general que haga simple la estimación para todas las tipologías de modelos de optimización dinámica. Inevitablemente, el investigador tendrá que hacer concesiones en el momento de especificar el modelo para asegurar la viabilidad, y el método de especificación y estimación más adecuado dependerá de las particularidades del proceso de elección y los objetivos de la investigación. En este sentido, he encontrado que dos simplificaciones son muy poderosas en cuanto a que frecuentemente proporcionan una gran ganancia en la viabilidad computacional del modelo a cambio de una pérdida relativamente pequeña (y a veces, una ganancia) en el contenido.

La primera sugerencia es que el investigador considere formas de captar la naturaleza de la situación de elección con el menor número de períodos de tiempo posible. A veces, de hecho por norma general, los períodos de tiempo no deben definirse usando intervalos estándar, como el año o el mes, sino más bien en unidades de distancia que sean más estructurales respecto al proceso de decisión. Por ejemplo, para el estudiante de secundaria y su decisión de ir o no a la universidad, podría parecer natural decir que hace una elección cada año entre los posibles puestos de trabajo y opciones de enseñanza que están disponibles en ese año, teniendo en cuenta sus decisiones pasadas. De hecho, esta afirmación es cierta: el estudiante, en efecto, hace elecciones anuales (o incluso mensuales, semanales, diarias). Sin embargo, este modelo se enfrentaría claramente a la maldición de la dimensionalidad. Por el contrario, la especificación que hemos comentado anteriormente implica sólo dos períodos de tiempo, o tres si se considera la jubilación. La estimación es bastante factible para esta especificación. De hecho, el modelo de dos períodos puede ser más preciso que un modelo anual: los estudiantes que deciden sobre la universidad probablemente piensan en términos de los años universitarios y sus opciones después de la universidad, en lugar de tratar de anticipar sus decisiones futuras para cada año futuro. McFadden y Train (1996) proporcionan un ejemplo de cómo un modelo de optimización dinámica, con sólo unos pocos períodos bien pensados, puede capturar con precisión la naturaleza de una situación de elección.



Una segunda simplificación de gran alcance fue observada por primera vez por Rust (1987). Supongamos que los factores que el decisor no observa de antemano también son los factores que el investigador no observa (ya sea antes o después), y que el decisor piensa que esos factores son valor extremo iid. Bajo este supuesto ciertamente restrictivo, las probabilidades de elección toman una forma cerrada que es fácil de calcular. El resultado se puede obtener fácilmente para nuestro modelo de elección de la universidad. Supongamos que el estudiante, cuando está en el primer período, descompone la utilidad del segundo período en una parte conocida y otra desconocida, por ejemplo,  $U_{2j}^C(e) = V_{2j}^C + e_{2j}^C$ , y que asume que  $e_{2j}^C$  sigue una distribución de valor extremo independiente de todo lo demás. Este factor desconocido pasa a ser conocido para el estudiante en el segundo período, de modo que la elección del segundo período implica la maximización sobre una  $U_{2j}^C \forall j$  conocida. Sin embargo, en el primer período es desconocida. Recuerde de la sección 3.5 que el máximo esperado de utilidades tipo valor extremo iid toma la conocida fórmula log-suma. En nuestro contexto, este resultado significa que

$$E(\max_j (V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C)) = \alpha \ln \left( \sum_j e^{V_{2j}^C} \right),$$

que podemos etiquetar  $LS_2^C$ .  $LS_2^W$  se obtiene de manera similar. Por tanto, la persona elige la universidad si

$$TEU_c > TEU_w,$$

$$U_{1c} + \lambda LS_2^C > U_{1w} + \lambda LS_2^W$$

Observe que esta regla de decisión tiene una forma cerrada: la integral sobre los factores futuros desconocidos se convierte en la fórmula log-suma. Consideremos ahora al investigador. Cada utilidad del primer período se descompone en una parte observada y otra no observada ( $U_{1c} = V_{1c} + \varepsilon_{1c}$ ,  $U_{1w} = V_{1w} + \varepsilon_{1w}$ ), y suponemos que las partes no observadas son valor extremo iid. Para las utilidades del segundo período, hacemos una suposición bastante restrictiva. Suponemos que la parte de la utilidad que el investigador no observa es la misma parte que el estudiante no sabe de antemano en el momento de decidir. Es decir, asumimos  $U_{2j}^C = V_{2j}^C + \varepsilon_{2j}^C \forall j$ , donde el término  $\varepsilon_{2j}^C$  del investigador es el mismo término  $e_{2j}^C$  del estudiante. Bajo esta hipótesis, el investigador puede calcular los términos log-suma de la utilidad futura,  $LS_2^C$  y  $LS_2^W$ , de forma exacta, ya que estos términos sólo dependen de la parte observada de la utilidad en el segundo período,  $V_{2j}^C \forall j$ , que es observada por el investigador y conocida de antemano por el decisor. La probabilidad de que el estudiante escoja la universidad es ahora

$$\begin{aligned} P_c &= \text{Prob}(TEU_c > TEU_w) \\ &= \text{Prob}(U_{1c} + \lambda LS_2^C > U_{1w} + \lambda LS_2^W) \\ &= \text{Prob}(V_{1c} + \varepsilon_{1c} + \lambda LS_2^C > V_{1w} + \varepsilon_{1w} + \lambda LS_2^W) \\ &= \frac{e^{V_{1c} + \lambda LS_2^C}}{e^{V_{1c} + \lambda LS_2^C} + e^{V_{1w} + \lambda LS_2^W}} \end{aligned}$$

El modelo toma la misma forma que la parte superior de un modelo logit jerárquico: la probabilidad de elección del primer período es la fórmula logit con un término log-suma incluido como una variable explicativa adicional. Múltiples períodos se manejan de la misma manera que logits jerárquicos de varios niveles.

En realidad, es dudoso que el investigador observe todo lo que el decisor conoce de antemano cuando elige. Sin embargo, la simplificación que se plantea a partir de esta suposición es tan grande, y la maldición de la dimensionalidad que surgiría de otra forma es tan severa, que proceder como si esta hipótesis fuese cierta vale la pena en muchas situaciones.